数理解析研究所講究録
1093 巻 1999 年 212-217

Two-Point Splicing System の言語生成能力の万能性

細川 英, 森田 憲一, 岩本 宙造, 今井 克暢
H.Hosokawa, K.Morita, C.Iwamoto and K.Imai
広島大学工学部
Faculty of Engineering, Hiroshima University
{hosokawa, morita, iwamoto, imai}@ke.sys.hiroshima-u.ac.jp

1 はじめに

近年、splicing 規則に基づく DNA 計算のシステム splicing system[1,2] が新たなタイプの計算モデルとして注目されている。Splicing system とは、制限酵素とリガーゼの作用により DNA 分子が切断され、それらが交差して再連結するプロセスをモデル化したものであり、記号列の切断と連結を並列的に実行することで言語生成を行うシステムのことである。しかし、従来の splicing system では、初期記号列集合と splicing 規則集合が共に有限の場合、生成される言語族が正規集合族にしかならないことが 知られていた。そこで、本研究では従来のシステムでは一点であった切断部分を二点に増やし、切断と結合が同時に二点で起きるような二種類の two-point splicing system を提案する。そして、初期記号列と splicing 規則の集合が有限の場合でも、これらのシステムの言語生成能力が万能になることを示す。

2 Splicing System

ここではまず従来の splicing system である extended H system について述べておく [1,2]。

V をアルファベット、# と \$ を V に属さない二つの特別な記号とする。Splicing 規則とは次のような r をいう: $r = u_1\#u_2\$u_3\#u_4$ ($\in V^*\#V^*\$V^*\#V^*$). 但し、$V^*$ は空列 ϵ を含む V 上の記号列集合とする。4 つの記号列 $w, x, y, z \in V^*$ の間に成り立つ関係 $\vdash_r$ を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
(w,x) \ \vdash_r \ (y,z) & \\
\text{iff} \quad & w = w_1u_1u_2w_2,\ x = x_1u_3u_4x_2, \\
& y = w_1u_1u_4x_2,\ z = x_1u_3u_2w_2, \\
& \text{for some } w_1, w_2, x_1, x_2 \in V^*.
\end{aligned}
$$

この関係が成り立つとき w, x がサイト u_1u_2, u_3u_4 で splicing 規則 r によって splice され (y, z) が生成されたと言う (図 1)。

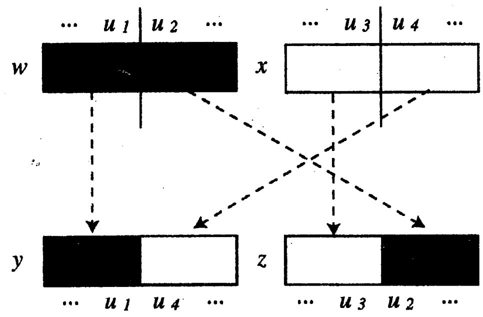

図 1: Splicing system における規則の適用

R を splicing 規則集合 ($R \subseteq V^*\#V^*\$V^*\#V^*$) とするとき $\sigma = (V, R)$ を H scheme と呼ぶ。$L \subseteq V^*$ を任意の言語とするとき、$\sigma(L), \sigma^n(L), \sigma^*(L)$ は以下のように定義される。

$$
\begin{aligned}
\sigma(L) &= \{y \in V^* \mid (w,x) \vdash_r (y,z) \\
& \qquad \text{or } (w,x) \vdash_r (z,y), \\
& \qquad \text{for some } w,x \in L,\ r \in R,\ z \in V^*\}, \\
\sigma^0(L) &= L, \\
\sigma^{i+1}(L) &= \sigma^i(L) \cup \sigma(\sigma^i(L)),\ i \geq 0, \\
\sigma^*(L) &= \bigcup_{i \geq 0} \sigma^i(L).
\end{aligned}
$$

そして、extended H system は以下のように定義される。

$$\gamma = (V, T, A, R).$$

ここで V はアルファベット、T は終端記号集合 ($T \subseteq V$)、A は初期記号列 (axiom) 集合 ($A \subseteq V^*$)、R は splicing 規則集合 ($R \subseteq V^*\#V^*\$V^*\#V^*$) である。

そして、γ によって生成される言語 $L(\gamma)$ は次のように定義される。

$$L(\gamma) = \sigma^*(A) \cap T^*.$$

F_1, F_2 を任意の言語族とする。$A \in F_1$, $R \in F_2$ であるような extended H system $\gamma = (V, T, A, R)$ によって得られる言語族は $EH(F_1, F_2)$ と記される。F_1 を縦に F_2 を横に、有限言語族 (FIN)、正規言語族 (REG)、線形言語族 (LIN)、文脈自由言語族 (CF)、文脈依存言語族 (CS)、帰納的可算言語族 (RE) のそれぞれの場合を示すと表 1 のようになる [1]。但し、F_1 が線形で F_2 が有限の場合の表中の L, CF は $LIN \subset EH(F_1, F_2) \subseteq CF$ を示す。

Set of splicing rules

Set of axioms	FIN	REG	LIN	CF	CS	RE
FIN	REG	RE	RE	RE	RE	RE
REG	REG	RE	RE	RE	RE	RE
LIN	L, CF	RE	RE	RE	RE	RE
CF	CF	RE	RE	RE	RE	RE
CS	RE	RE	RE	RE	RE	RE
RE	RE	RE	RE	RE	RE	RE

Table.1 : Extended H systemにより生成される言語族[1]

しかし、表で示されるように、このシステムでは与えられた初期記号列と splicing 規則の集合が有限の場合、正規集合族しか導くことが出来ない。

そこで、本研究では以下に示すような二種類の two-point splicing system を提案し、これらのシステムが初期記号列と splicing 規則の集合が有限の場合でも言語生成能力が万能となる (つまり、RE を正確に特徴づける) ことを示す。

3 Two-point splicing system type I (TPS I system)

3.1 定義

Two-point splicing system type I (TPS I system) とは、従来の splicing 操作では一ヶ所であった切断部分を図 2 のように二ヶ所に増やし、その間の記号列を交換するといった splicing 操作を行うシステムのことである。

TPS I system 上の splicing 規則は、どのように二点で切断し、その間の記号列を交換するかを示したものであり、アルファベット V と V に属さない二つの特別な記号 #, \$ を用いて、$r = u_1\#u\#u_2\$v_1\#v\#v_2$ ($\in V^*\#V^*\#V^*\$V^*\#V^*\#V^*$) によって表される。そ

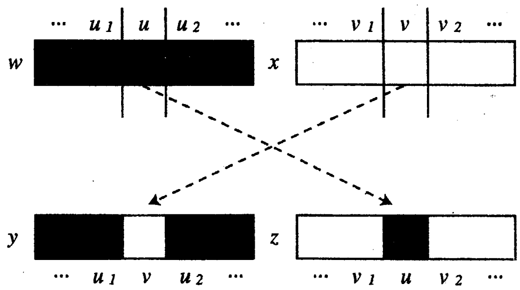

図 2: Two-point splicing system type I

して、splicing 規則 $r = u_1\#u\#u_2\$v_1\#v\#v_2$ に対して $V^* \times V^*$ 上の関係 $\vdash_r$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}(w, x) \ \vdash_r \ (y, z) & \\ \text{iff} \quad & w = w_1u_1uu_2w_2,\ x = x_1v_1vv_2x_2, \\ & y = w_1u_1vu_2w_2,\ z = x_1v_1uv_2x_2, \\ & \text{for some } w_1, w_2, x_1, x_2 \in V^*.\end{aligned}$$

Extended H system の場合と同様に、これを y, z が w, x から splicing によって得られたという。

V をアルファベット、R を splicing 規則集合 ($R \subseteq V^*\#V^*\#V^*\$V^*\#V^*\#V^*$) とするとき $\sigma_I = (V, R)$ を TPS I scheme と呼ぶ。$L \subseteq V^*$ を任意の言語とするとき、$\sigma_I(L), \sigma_I^n(L), \sigma_I^*(L)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\sigma_I(L) &= \{y \in V^* \mid (w, x) \vdash_r (y, z) \\ &\qquad \text{or } (w, x) \vdash_r (z, y), \\ &\qquad \text{for some } w, x \in L,\ r \in R,\ z \in V^*\}, \\ \sigma_I^0(L) &= L, \\ \sigma_I^{i+1}(L) &= \sigma_I^i(L) \cup \sigma_I(\sigma_I^i(L)),\ i \geq 0, \\ \sigma_I^*(L) &= \bigcup_{i \geq 0} \sigma_I^i(L).\end{aligned}$$

そして、TPS I system を次のように定義する。

$$\delta_I = (V, T, A, R).$$

ここで V はアルファベット、T は終端記号集合 ($T \subseteq V$)、A は初期記号列 (axiom) 集合 ($A \subseteq V^*$)、R は splicing 規則集合 ($R \subseteq V^*\#V^*\#V^*\$V^*\#V^*\#V^*$) である。

そして、δ_I によって生成される言語 $L(\delta_I)$ を次のように定義する。但し、$\sigma_I = (V, R)$ とする。

$$L(\delta_I) = \sigma_I^*(A) \cap T^*.$$

F_1, F_2 を任意の言語族とする。$A \in F_1$, $R \in F_2$ であるような TPS I system $\delta_I = (V, T, A, R)$ によって得

られる言語の族を

$$TP_I(F_1, F_2)$$

と記す。

3.2 TPS I system による帰納的可算言語の特徴づけ

次の定理 3.1 は TPS I system で生成される言語族が帰納的可算言語族と一致することを示している。

(注) TPS I system は後で示す TPS II system を特殊な場合として含んでいるので、定理 3.1 は TPS II system が帰納的可算集合族を特徴づけるという結果 (定理 4.1) から系として得られる。しかし、TPS I system の場合には、任意の 0 型文法に対して、それを直接的に模倣するシステムが容易に構成できるので、ここではそのような方法による証明を与えることにする。

定理 3.1 $TP_I(FIN, FIN) = RE.$

(証明)

任意に与えられた 0 型文法 $G = (N, T, P, S)$ に対して、$L(G) = L(\delta_I)$ となるような TPS I system δ_I は次のように構成できる。但し、N は非終端記号集合、T は終端記号集合 ($N \cap T = \phi$)、P は書換規則集合、そして、S は開始記号とする。

$$\delta_I = (V, T, A, R).$$

$$\begin{aligned} V &= N \cup T \cup \{X, Y\} \\ &\quad \text{但し、} X, Y \notin (N \cup T) \text{ とする,} \\ A &= \{S\} \cup \{X\beta Y \mid \alpha \to \beta \in P\}, \\ R &= \{\#\alpha\#\$X\#\beta\#Y \mid \alpha \to \beta \in P\} \text{ とする.} \end{aligned}$$

定理を証明するために次の (1)(2) を帰納法で証明する。但し、$\eta \underset{G}{\Rightarrow} \zeta$ は文法 $G = (N, T, P, S)$ において P 中の書換規則により η から ζ を導出することを示し、$\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}$ は $\underset{G}{\Rightarrow}$ の反射・推移閉包を示している。また、$\eta \overset{i}{\underset{G}{\Rightarrow}} \zeta$ は η から ζ が i ステップで得られることを示す。

(1) 任意の $\eta \in (N \cup T)^*$ に対し、$S \overset{n}{\underset{G}{\Rightarrow}} \eta$ ならば $\eta \in \sigma_I^n(A)$ となる。

(1) の証明

(I) $n = 0$ のとき

$\eta = S$ であるので明らか。

(II) $n = k + 1$ $(k \geq 0)$ のとき

$n' \leq k$ である任意の n' に対して (1) が満たされていると仮定する。$S \overset{k+1}{\underset{G}{\Rightarrow}} \eta$ となるような任意の η について考える。このとき、ある η' が存在し、$S \overset{k}{\underset{G}{\Rightarrow}} \eta' \underset{G}{\Rightarrow} \eta$ となる。従って、ある書換規則 $\alpha \to \beta$ $(\in P)$ が存在し、ある η_0, $\eta_1 \in (N \cup T)^*$ に対して、$\eta' = \eta_0\alpha\eta_1$, $\eta = \eta_0\beta\eta_1$ と表わすことができる。このとき splicing 規則 $r_1 = \#\alpha\#\$X\#\beta\#Y$ により次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \eta_0\alpha\eta_1 \\ X\beta Y \end{pmatrix} \vdash_{r_1} \begin{pmatrix} \eta_0\beta\eta_1 \\ X\alpha Y \end{pmatrix}.$$

仮定より $\eta' \in \sigma_I^k(A)$ が成り立ち、$X\beta Y \in A$ であるので、$\eta \in \sigma_I^{k+1}(A)$ である。

したがって (I)(II) より (1) が成り立つ。((1) の証明終)

(2) 任意の $\eta \in (N \cup T)^*$ に対して、$\eta \in \sigma_I^m(A)$ ならば

(a) $S \overset{n}{\underset{G}{\Rightarrow}} \eta$ となる $n \leq m$ が存在する。

または、

(b) ある $\xi \in (N \cup T)^*$ に対し、$\eta = X\xi Y$ と書ける。

(2) の証明

(I)$m = 0$ のとき

$\sigma_I^0(A) = A$ より、η は S か $X\beta Y$ の形の記号列となる。$\eta = S$ のときは $S \overset{0}{\underset{G}{\Rightarrow}} \eta$ であるので (a) を、$\eta = X\beta Y$ のときは (b) を満たす。よって $m = 0$ のときは成り立つ。

(II)$m = k + 1$ $(k \geq 0)$ のとき

$m' \leq k$ であるような任意の m' に対して (2) が成り立つと仮定する。任意の $\eta \in \sigma_I^{k+1}(A)$ について考える。$\eta \in \sigma_I^k(A)$ のときは帰納法の仮定より成り立っているので、$\eta \in \sigma_I^{k+1}(A) - \sigma_I^k(A)$ とする。R 中の splicing 規則がすべて $\#\alpha\#\$X\#\beta\#Y$ $(\in R)$ という形をしていることと、$\sigma_I^k(A)$ の各要素が (2) を満たすことから、ある $\eta' \in \sigma_I^k(A)$, $X\beta Y \in \sigma_I^k(A)$, $r = \#\alpha\#\$X\#\beta\#Y$ $(\in R)$ および、$\zeta \in V^*$ が存在して次のような splicing が起こる。

$$\begin{pmatrix} \eta' \\ X\beta Y \end{pmatrix} \vdash_{r} \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

このとき splicing 規則の形により、η, ζ のどちらかが $X\alpha Y$ となる。$\eta = X\alpha Y$ のときは (2)(b) を満たすので、以下では $\eta \neq X\alpha Y$ とする。

$\eta' = X\xi' Y$ $(\xi' \in (N \cup T)^*)$ の場合、α, $\beta \in (N \cup T)^*$ であるため、ある $\xi \in (N \cup T)^*$ に対して、$\eta = X\xi Y$

と書けなければならない。よって、この η は (2)(b) を満たす。また、ある $n' \le k$ に対して、$S \overset{n'}{\underset{G}{\Rightarrow}} \eta'$ となる場合は、$\eta' = \eta_0\alpha\eta_1$ (η_0, $\eta_1 \in (N \cup T)^*$) と書ける。よって、$S \overset{n'}{\underset{G}{\Rightarrow}} \eta_0\alpha\eta_1 \underset{G}{\Rightarrow} \eta_0\beta\eta_1 = \eta$ となり、この η は (2)(a) を満たす。よって $m = k+1$ のときも (2) は成り立つ。

従って、(I)(II) より (2) が成り立つ。((2) の証明終)

(1)(2) より
$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \eta$ iff $\eta \in \sigma_I^*(A) \cap (N \cup T)^*$
が得られ $L(G) = L(\delta_I)$ が証明された。 □

4 Two-point splicing system type II (TPS II system)

4.1 定義

TPS I system の特別な場合として、システム中の全ての splicing 規則が $V^*\#V^*\#V^*\$V^*\#\epsilon\#V^*$ の要素であるようなシステムを考える。このシステムは、一方の部分記号列をもう一方の記号列に挿入するといった TPS I system よりシンプルな splicing 操作のみ行うシステムである (図 3)。

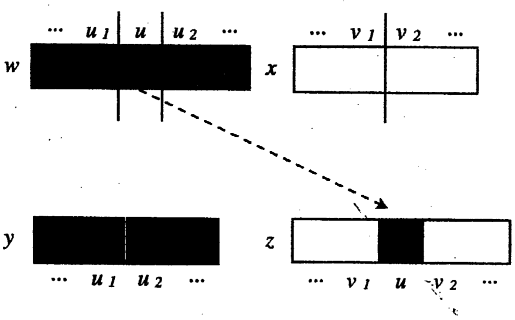

図 3: Two-point splicing system type II

このシステムを TPS II system と呼び、

$$\delta_{II} = (V, T, A, R)$$

とする。それぞれの記号は TPS I system のときと同様である。但し、このシステムの splicing 規則を以下では $r = u_1\#u\#u_2\$v_1\#v_2$ と記述する。また、$\sigma_{II} = (V, R)$ を $\sigma_I = (V, R)$ と同様とし、TPS II scheme と呼ぶことにする。

4.2 TPS II system による帰納的可算言語の特徴づけ

$TP_{II}(F_1, F_2)$ を $TP_I(F_1, F_2)$ と同様の言語族とするとき、TPS II system で生成される言語族と帰納的可算言語族が一致するということを示す次の定理 4.1 が成り立つ。

定理 4.1 $TP_{II}(FIN, FIN) = RE.$

(証明)

$G = (\{S, A, B, C\}, T, S, P \cup \{ABC \to \epsilon\})$ を Geffert 標準形 [2] であるような任意の文法とする。但し、T は終端記号集合、S は開始記号、P は書換規則集合で $S \to uSv$, $S \to x \in P$ $(u, v, x \in (T \cup \{A, B, C\})^+)$ である。G を模倣する TPS II system は次の通り。

$$\delta_{II} = (V, T, A, R)$$

$$\begin{aligned}
V &= \{S_1, S_2, A, B, C, L, M, X, Y\} \cup T \\
A &= \{S_1S_2\} \cup \{XLuS_1S_2vMY \mid S \to uSv \in P\}, \\
&\quad \cup \{XLwMY \mid S \to w \in P\} \\
&\quad \cup \{XY\} \\
R &= \{X\#LuS_1S_2vM\#Y\$S_1\#S_2 \mid S \to uSv \in P\} \\
&\quad \cup \{X\#LwM\#Y\$S_1\#S_2 \mid S \to w \in P\} \\
&\quad \cup \{\#ABC\#\$X\#Y\} \\
&\quad \cup \{\#S_1L\#\$X\#Y,\ \#MS_2\#\$X\#Y\} \text{ とする.}
\end{aligned}$$

$f : (\{S, A, B, C\} \cup T)^* \to V^*$ と $g : V^* \to (\{S, A, B, C\} \cup T)^*$ を次のような関数として定義する。

1. $f(\eta)$ は η 中の全ての S を S_1S_2 に置き換えて得られる列
2. $g(\xi)$ は ξ 中の全ての部分列 S_1L と MS_2 を消去し、S_1S_2 を S に置き換えて得られる列

このとき次の (1)(2) が成り立つ。(但し、$\sigma_{II} = (A, R)$ である。)

(1) 任意の $\eta \in (\{S, A, B, C\} \cup T)^*$ に対して $S \overset{n}{\underset{G}{\Rightarrow}} \eta$ ならば $f(\eta) \in \sigma_{II}^*(A)$

(2) 任意の $\xi \in V^*$ に対し、$\xi \in \sigma_{II}^m(A)$ ならば、

(a) $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} g(\xi)$。

または、

(b) ある $\xi' \in V^*$ が存在して、$\xi = X\xi'Y$ と書ける。

そこで、この (1)(2) の証明を行う。

(1) 任意の $\eta \in (\{S, A, B, C\} \cup T)^*$ に対して $S \overset{n}{\underset{G}{\Rightarrow}} \eta$ ならば $f(\eta) \in \sigma_{II}^*(A)$

(1) の証明

(I) $n=0$ のとき
$\eta=S$ であるので $f(\eta)=f(S)=S_1S_2\in A$ となり、$f(\eta)\in\sigma_{II}^*(A)$ が成り立つ。

(II)$n=k+1$ $(k\geq 0)$ のとき
$n'\leq k$ であるような任意の n' に対して (1) が成り立つと仮定する。$S\overset{k+1}{\underset{G}{\Rightarrow}}\eta$ であるような任意の η を考える。このとき、ある η' が存在し、$S\overset{k}{\underset{G}{\Rightarrow}}\eta'\underset{G}{\Rightarrow}\eta$ となる。ここで、$\eta'\underset{G}{\Rightarrow}\eta$ の導出に用いられる書換規則の形によって次の三通りの場合 (i)(ii)(iii) に分ける。

(i) 書換規則 $S\rightarrow uSv\in P$ の場合：
ある $\eta_0,\eta_1\in(\{A,B,C\}\cup T)^*$ に対して $\eta'=\eta_0S\eta_1$, $\eta=\eta_0uSv\eta_1$ と書ける。$r_1=X\#LuS_1S_2vM\#Y\$S_1\#S_2$, $r_2=\#S_1L\#\$X\#Y$, $r_3=\#MS_2\#\$X\#Y$ $(r_1,r_2,r_3\in P)$ とすると、

$$\begin{pmatrix}\eta_0S_1S_2\eta_1\\XLuS_1S_2vMY\end{pmatrix}\vdash_{r_1}\begin{pmatrix}\eta_0S_1LuS_1S_2vMS_2\eta_1\\XY\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}\eta_0S_1LuS_1S_2vMS_2\eta_1\\XY\end{pmatrix}\vdash_{r_2}\begin{pmatrix}\eta_0uS_1S_2vMS_2\eta_1\\XS_1LY\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}\eta_0uS_1S_2vMS_2\eta_1\\XY\end{pmatrix}\vdash_{r_3}\begin{pmatrix}\eta_0uS_1S_2v\eta_1\\XMS_2Y\end{pmatrix}.$$

である。帰納法の仮定より $f(\eta')=\eta_0S_1S_2\eta_1\in\sigma_{II}^*(A)$ であり、また $XLuS_1S_2vMY,XY\in A$ であるので、$f(\eta)\in\sigma_{II}^*(A)$ となる。

(ii) 書換規則 $S\rightarrow w\in P$ の場合：
ある $\eta_0,\eta_1\in(\{A,B,C\}\cup T)^*$ に対して $\eta'=\eta_0S\eta_1$, $\eta=\eta_0w\eta_1$ と書ける。$r_1=X\#LwM\#Y\$S_1\#S_2$, $r_2=\#S_1L\#\$X\#Y$, $r_3=\#MS_2\#\$X\#Y$ $(r_1,r_2,r_3\in P)$ とすると、

$$\begin{pmatrix}\eta_0S_1S_2\eta_1\\XLwMY\end{pmatrix}\vdash_{r_1}\begin{pmatrix}\eta_0S_1LwMS_2\eta_1\\XY\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}\eta_0S_1LwMS_2\eta_1\\XY\end{pmatrix}\vdash_{r_2}\begin{pmatrix}\eta_0wMS_2\eta_1\\XS_1LY\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}\eta_0wMS_2\eta_1\\XY\end{pmatrix}\vdash_{r_3}\begin{pmatrix}\eta_0w\eta_1\\XMS_2Y\end{pmatrix}.$$

である。帰納法の仮定より $f(\eta')\in\sigma_{II}^*(A)$ であり、また $XLwMY,XY\in A$ であるので、$f(\eta)\in\sigma_{II}^*(A)$ となる。

(iii) 書換規則 $ABC\rightarrow\epsilon\in P$ の場合：
ある $\eta_0,\eta_1\in(\{A,B,C\}\cup T)^*$ に対して $\eta'=\eta_0ABC\eta_1$, $\eta=\eta_0\eta_1$ と書ける。$r_1=\#ABC\#\$X\#Y\in P$ とすると、

$$\begin{pmatrix}\eta_0ABC\eta_1\\XY\end{pmatrix}\vdash_{r_1}\begin{pmatrix}\eta_0\eta_1\\XABCY\end{pmatrix}.$$

である。帰納法の仮定より $f(\eta')\in\sigma_{II}^*(A)$ であり、また $XY\in A$ であるので、$f(\eta)\in\sigma_{II}^*(A)$ となる。

よって、これらのことより $n=k+1$ のときでも (1) が成り立つ。

したがって、(I)(II) より (1) が成り立つことが証明された。((1) の証明終)

(2) 任意の $\xi\in V^*$ に対し、$\xi\in\sigma_{II}^m(A)$ ならば、
(a) $S\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}g(\xi)$。
または、
(b) ある $\xi'\in V^*$ が存在して、$\xi=X\xi'Y$ と書ける。

(2) の証明

(I) $m=0$ のとき
$\xi\in\sigma_{II}^0(A)=A$ であるので ξ は S_1S_2, $XLuS_1S_2vMY$, $XLwMY$, XY の形の記号列のみである。したがって $\xi=S_1S_2$ のとき (2)(a) を満たし、ξ がそれ以外のときは (2)(b) を満たす。

(II) $m=k+1$ $(k\geq 0)$ のとき
$m'\leq k$ であるような任意の m' に対して (2) が成り立つと仮定する。$\xi\in\sigma_{II}^{k+1}(A)$ であるような任意の ξ を考える。もし、$\xi\in\sigma_{II}^k(A)$ ならば帰納法の仮定から (2) が成り立つので、$\xi\in\sigma_{II}^{k+1}(A)-\sigma_{II}^k(A)$ とする。したがって、ある $\mu,\nu\in\sigma_{II}^k(A)$ と $\zeta\in V^*$ および $r\in R$ が存在して

$$\begin{pmatrix}\mu\\\nu\end{pmatrix}\vdash_r\begin{pmatrix}\xi\\\zeta\end{pmatrix}$$

と書くことができる。ここで規則 r の形により次の四通りの場合 (i)(ii)(iii)(iv) に分ける。

(i) $r=X\#LuS_1S_2vM\#Y\$S_1\#S_2$ の場合：
帰納法の仮定および r の形から、ある $\mu_0,\mu_1\in V^*$ に対して $\mu=\mu_0S_1S_2\mu_1$、かつ $\nu=XLuS_1S_2vMY$ と書ける (μ と ν が入れ替わっている場合も同様なので以下では略)。このとき ξ,ζ のどちらかが XY となる。$\xi=XY$ のとき (2)(b) を満たすので以下では $\xi\neq XY$ とする。

まず、μ が (2)(b) を満たす場合、つまり $\mu=X\mu'Y$ $(\mu'\in V^*)$ と書ける場合、r の形のために、$\xi=X\xi'Y$ $(\xi'\in V^*)$ と書けなければならない。このとき ξ は (2)(b) を満たす。次に μ が (2)(a) を満たす場合、つまり、$S\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}g(\mu)$ となる場合を考える。$\xi=\mu_0S_1LuS_1S_2vMS_2\mu_1$ となるので、$S\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}g(\mu)=$

$g(\mu_0 S_1 S_2 \mu_1) \underset{G}{\Rightarrow} g(\mu_0 S_1 Lu S_1 S_2 v M S_2 \mu_1) = g(\xi)$ となり、この ξ は (2)(a) を満たす。よって、この形の規則を用いた ξ は (2) を満たす。

(ii) $r = X\#LwM\#Y\$S_1\#S_2$ の場合：
帰納法の仮定および r の形から、ある $\mu_0, \mu_1 \in V^*$ に対して $\mu = \mu_0 S_1 S_2 \mu_1$、かつ $\nu = XLwMY$ と書ける。このとき ξ, ζ のどちらかが XY となる。$\xi = XY$ のとき (2)(b) を満たすので以下では $\xi \neq XY$ とする。

$\mu = X\mu' Y$ $(\mu' \in V^*)$ と書ける場合、r の形のために、$\xi = X\xi' Y$ $(\xi' \in V^*)$ と書けなければならない。このとき ξ は (2)(b) を満たす。次に $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} g(\mu)$ となる場合を考える。$\xi = \mu_0 S_1 LwMS_2 \mu_1$ となるので、$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} g(\mu) = g(\mu_0 S_1 S_2 \mu_1) \underset{G}{\Rightarrow} g(\mu_0 S_1 LwMS_2 \mu_1) = g(\xi)$ となり、この ξ は (2)(a) を満たす。よって、この形の規則を用いた ξ は (2) を満たす。

(iii) $r = \#ABC\#\$X\#Y$ の場合：
帰納法の仮定および r の形から、ある $\mu_0, \mu_1 \in V^*$ に対して $\mu = \mu_0 ABC \mu_1$、かつ $\nu = XY$ と書ける。このとき ξ, ζ のどちらかが $XABCY$ となる。$\xi = XABCY$ のとき (2)(b) を満たすので以下では $\xi \neq XABCY$ とする。

$\mu = X\mu' Y$ $(\mu' \in V^*)$ と書ける場合、r の形のため、$\xi = X\xi' Y$ $(\xi' \in V^*)$ と書けなければならない。このとき ξ は (2)(b) を満たす。次に、$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} g(\mu)$ となる場合を考える。$\xi = \mu_0 \mu_1$ となるので、$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} g(\mu) = g(\mu_0 ABC \mu_1) \underset{G}{\Rightarrow} g(\mu_0 \mu_1) = g(\xi)$ となり、この ξ は (2)(a) を満たす。よって、この形の規則を用いた ξ は (2) を満たす。

(iv) $r = \#S_1 L\#\$X\#Y$ の場合：
帰納法の仮定および r の形から、ある $\mu_0, \mu_1 \in V^*$ に対して $\mu = \mu_0 S_1 L \mu_1$ かつ $\nu = XY$ と書ける。このとき ξ, ζ のどちらかが XS_1LY となる。$\xi = XS_1LY$ のとき (2)(b) を満たすので以下では $\xi \neq XS_1LY$ とする。

$\mu = X\mu' Y$ $(\mu' \in V^*)$ と書ける場合、r の形のため、$\xi = X\xi' Y$ $(\xi' \in V^*)$ と書けなければならない。このとき ξ は (2)(b) を満たす。次に $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} g(\mu)$ となる場合を考える。$\xi = \mu_0 \mu_1$ となるので、$S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} g(\mu) = g(\mu_0 S_1 L \mu_1) \underset{G}{\Rightarrow} g(\mu_0 \mu_1) = g(\xi)$ となり、この ξ は (2)(a) を満たす。よって、この形の規則を用いた ξ は (2) を満たす。

(v) $r = \#MS_2\#\$X\#Y$ の場合：
(iv) と同様である。

よって、(i)(ii)(iii)(iv)(v) より $n = k + 1$ のとき成り立つ。したがって (I)(II) から (2) が成り立つ。((2) の証明終)

この (1)(2) より

$$\eta \in (\sigma_{II}^*(A) \cap (V - \{X, Y\})^*) \text{ iff } S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} g(\eta)$$

となり、従って $L(G) = L(\delta_{II})$ が成り立つことが証明された。つまり、定理である $TP_{II}(FIN, FIN) = RE$ が証明された。 □

5 まとめ

本研究では splicing system の新しいタイプとして、二ヶ所で記号列を切断し、その間の部分記号列を交換する two-point splicing system type I を提案した。そしてこのシンプルなシステムは、従来の一ヶ所で切断するシステムとは異なり、初期記号列と splicing 規則の集合が有限の場合でも帰納的可算集合族を特徴付けることを示した。さらに、一方の記号列から部分記号列を取り出し、もう一方に挿入するといった type I のサブクラスである type II を提案し、このシステムにおいても type I と同様の能力があることを証明した。

参考文献

[1] T.Head, G.Păun, and D.Pixton, Language theory and molecular genetics: generative mechanisms suggested by DNA recombination, Handbook of Formal Languages, Vol.2 (G.Rosenberg, A.Salomaa, eds.), pp.295-360, Springer (1996).

[2] G.Păun, G.Rozenberg and A.Salomaa, DNA Computing - New Computing Paradigms, Springer (1998).